Sumario

La matemática griega (I)

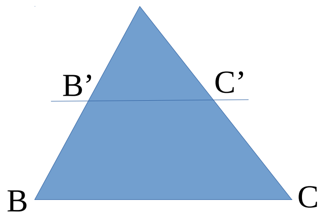
Matemática griega

La matemática griega lleva en sí la aritmética, la geometría y la álgebra. Mesopotamia, Egipto, India y China desarrollaron técnicas sofisticadas de cálculo que eran algo así como un conjunto de “recetas” que no incluían demostración y que se utilizaban para resolver casos concretos. En la cultura griega la matemática formaba parte de la φιλοσοφία (amor a la sabiduría) y de la *θεωρία* (contemplación). Se puede decir que los griegos inventaron el “saber teórico”, el cual se caracteriza por ser un saber universal y abstracto que pone por encima de la aplicación práctica la comprensión y que exige, además, una demostración racional. Este “saber teórico” lo trataron de aplicar los griegos no sólo en la matemática, sino también en otros campos del conocimiento. Con todo, la matemática fue para los griegos el paradigma del “saber teórico” y con ella alcanzaron sus mayores éxitos científicos.

No se conserva ninguna obra completa de matemática anterior a “Elementos” de Euclides (ca. 300 a.C.), a excepción de “La esfera en movimiento” de Autólico de Pitane (finales del s. IV). El peripatético Eudemo de Rodas en la segunda mitad del siglo IV escribió la primera *Historia de las matemáticas*, pero sólo se conservan resúmenes posteriores de esta obra. La tradición nos dice que Tales (ca. 624-546 a.C.) y Pitágoras (ca. 570-496 a.C.) introdujeron el conocimiento matemático en Grecia, tomando el que existía en Oriente –Mesopotamia y Egipto– y añadiendo un deseo de comprensión teórica –y mística con Pitágoras– del mundo. Pero no se puede saber con certeza si los teoremas que se les atribuyen eran conocidos por estos presocráticos ni si ofrecieron alguna demostración.

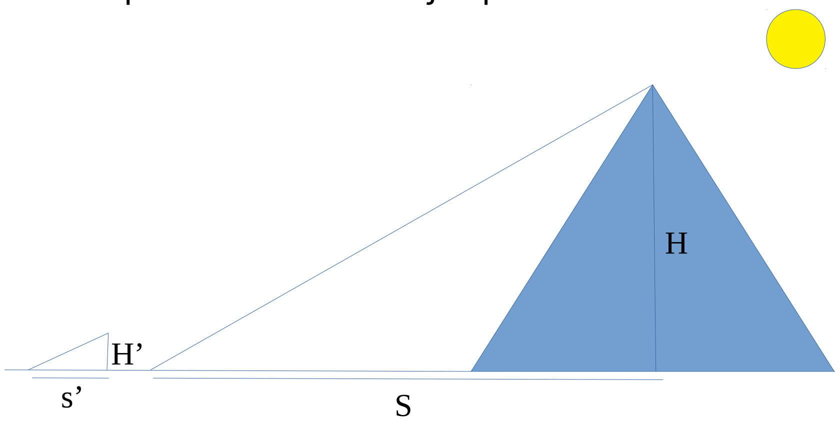
“Primer” teorema de Tales

Si en el interior de un triángulo se traza una línea paralela a uno de sus lados, se obtiene un triángulo semejante al primero.



Al ser dos triángulos semejantes, entonces los ángulos de ambos triángulos son iguales. Además, al ser semejantes, sus lados son proporcionales.

Según la tradición, Tales utilizó este teorema para medir la altura de la pirámide de Keops. Veamos esquemáticamente un ejemplo:



En la figura se representa a la pirámide con una altura H y con una sombra proyectada de longitud S. La H’ representa la altura de un palo clavado en el suelo que proyecta una sombra S’. Siguiendo lo que nos dice el primer teorema de Tales, tenemos:

$$\frac{H}{S}=\frac{H'}{S'};\ H=\frac{H'.S}{S'}$$

De esta manera, al disponer de los datos de S’, H’ y S, es posible obtener H, esto es, la altura de la pirámide.

Ὁ δὲ Ἱερώνυμος καὶ ἐκμετρῆσαί φησιν αὐτὸν τὰς πυραμίδας ἐκ τῆς σκιᾶς, παρατηρήσαντα ὅτε ἡμῖν ἰσομεγέθης ἐστίν.[1]

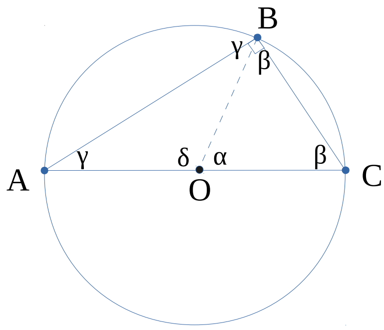
---

1 D.L., I 28.

> Jerónimo [de Rodas] dice que [Tales] midió las pirámides valiéndose de su sombra, después de haberla observado cuando es igual a nuestra altura.

"Segundo" teorema de Tales

El triángulo que forman los dos extremos (A, C) del diámetro de una circunferencia y un punto cualquiera de la circunferencia (B) es rectángulo, con un ángulo recto en ese punto.



Lo primero que tenemos que recordar es que un triángulo rectángulo es aquel que tiene un un ángulo de 90º. En este caso, el ángulo en el punto B, según el teorema, es de 90º. Para poder realizar la *demostración* de este teorema es necesario hacer uso de la imaginación y trazar la línea OB para obtener así dos triángulos isósceles –un triángulo isósceles es aquel que tiene dos lados de longitud igual y, en consecuencia, dos ángulos iguales–. En efecto, el triángulo ABO y el triángulo OBC son dos triángulos isósceles en la medida en que dos de sus lados miden el diámetro de la circunferencia. A esto, es necesario tener un conocimiento previo, a saber, que la suma de los ángulos de un triángulo es de 180º. Con estos datos, ahora ya podemos desarrollar la demostración de este "segundo" teorema de Tales:

$2\beta+\alpha = 2\gamma+\delta = 180^{\circ}$; $2\beta+\alpha +2\gamma+\delta = 360^{\circ}$; Y si $\alpha+\delta = 180^{\circ}$ entonces:

$2\beta+ 2\gamma = 180^{\circ}$; por lo que $\boldsymbol{\beta+ \gamma = 90^{\circ}}$ **(De esta manera queda demostrado el teorema.)**

Contribuciones al razonamiento matemático

Los griegos introducen en el razonamiento matemático el uso de diagramas con letras que permite seguir los pasos de una demostración que se hace *pública*. También introducen la necesidad de basarse en resultados previos (v.g. la suma de los ángulos de un triangulo es de 180º). Destaca, además, cómo desarrollan la idea de la generalidad del resultado (v.g. un diagrama es un ejemplo concreto que se puede interpretar de un modo general, como en el caso del segundo teorema de Tales, pues el punto B puede ser cualquiera). A todo esto hay que añadir cómo de importante es la imaginación, gracias a la cual se despliegan elementos explicativos que permiten desarrollar la demostración con mayor claridad (v.g. el radio OB del referido segundo teorema de Tales).

Teorema de Pitágoras

No queda claro que Pitágoras hiciera contribuciones significativas a las matemáticas, pues lo que se cuenta de este pensador inicial griego es bastante legendario. Podríamos hablar de las *matemáticas pitagóricas* como un conjunto de teoremas demostrados por algunos de sus seguidores, unas matemáticas impregnadas de una visión mística de la realidad donde el número es su principio último.

> En cuanto a la interpretación de la realidad, los pitagóricos lo hicieron a partir del número (ἀριθμός) como ἀρχή. Es decir, el número no era una elaboración abstracta de carácter cuantitativo, sino que tenía un carácter cualitativo en cuanto ser real: «Toda determinación ontológica, todo lo que constituye el ser de algo es número»[2]

El teorema de Pitágoras enuncia que *dado un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.* Los babilonios (ca. 1800 a.C.) ya conocían numerosas ternas pitagóricas, esto es, enteros tales que $a^2+b^2=c^2$, con los que podían “construir” triángulos rectángulos. Pero el teorema como *propiedad general* de los triángulos rectángulos, no limitada a enteros, sólo fue formulado y demostrado en Grecia.

Los números irracionales

El teorema de Pitágoras, según la tradición, tuvo consecuencias “nefastas” para los pitagóricos en la medida que ellos mismos descubrieron una consecuencia que iba en contra de su propia filosofía.

> Según la leyenda, el descubrimiento le costó a Hipaso de Metaponto ser arrojado al mar y produjo una crisis en el pitagorismo; pero ni en Aristóteles ni en Eudemo hay el menor rastro de ninguna crisis.[3]

Los pitagóricos habían defendido la idea de que todo se podía explicar con números racionales (fracciones de números naturales) y que las relaciones entre las cosas de la realidad eran semejantes a las relaciones existentes entre los números que la constituían, pero con el referido teorema descubrieron que la diagonal de un cuadrado no era conmensurable con el lado.

> Pero la propia indagación aritmética llevó a una dificultad en la idea pitagórica de que las relaciones entre las cosas son un trasunto de las relaciones entre los números que las caracterizan, como en las armonías de los intervalos musicales. Se trata del problema de las magnitudes inconmensurables (los irracionales) que no pueden explicarse como razones entre naturales: la diagonal de un cuadrado no puede ser un múltiple de una parte alícuota del lado.[4]

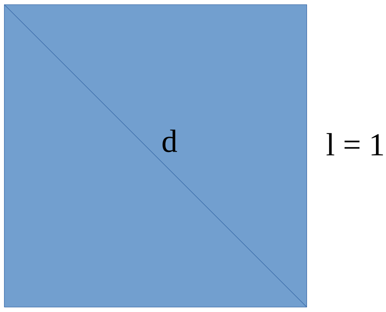
---

2 Moa, F., *De Tales a Aristóteles*, www.fmoa.es, 2021, p. 15.
3 Solís, C., Sellés, M., *Historia de la ciencia*, Espasa, 2021, p. 74.
4 *Ibíd.*.

Los babilonios habían llegado a calcular √2 sin saber que lo que habían calculado era una aproximación a una cifra que no se podía alcanzar a través de un número fraccionario. Fueron los pitagóricos quienes descubrieron este hecho por medio de una prueba abstracta y general.

Demostración por reducción al absurdo

Supongamos que partimos del siguiente cuadrado:



Ahora vamos a suponer que la diagonal "d" es conmensurable con el lado, esto es, que "d" se podrá expresar como un número racional "n/m" que es proporcional a "l" y donde "n" y "m" son números naturales. Con el teorema de Pitágoras tenemos:

$$d=\sqrt{2}=n/m$$

Y si ahora eliminamos los factores comunes que puedan tener "n" y "m", entonces **necesariamente "n" y "m" no pueden ser pares**.

Entonces:

$$\sqrt{2}=n/m\,;\left(\frac{n}{m}\right)^2=2=\frac{n^2}{m^2}$$

Luego:

$$n^2=2m^2$$

Por tanto, "n" es par porque los cuadrados pares son siempre el cuadrado de un número par. Y habrá un número "p" tal que n=2p, por lo que:

$$(2p)^2=2m^2\,;4p^2=2m^2\,;2p^2=m^2$$

Luego "m" es también par, por lo que la suposición necesaria de que "m" y "n" no pueden ser pares entra en contradicción. Dada esta contradicción, pues, la suposición de que "d" es conmensurable resulta falsa.

La matemática griega (II)

La contribución de Platón y Aristóteles a la matemática

Se puede decir que Platón y Aristóteles no realizaron grandes contribuciones a la matemática, pero sí que tuvieron una gran influencia en su desarrollo.

Platón convirtió el *quadrivium* pitagórico (aritmética, geometría, astronomía y música) en un elemento básico de la enseñanza en la Academia. Formó en torno suyo la mayor escuela de matemáticas de la primera mitad del siglo IV.

> De hecho, compartieran plenamente o no el esquema platónico, en la Academia participaron matemáticos notables como Teeteto, que demostró que solo hay cinco sólidos regulares. Eudoxo, discípulo de Arquitas, autor de la teoría de las proporciones y de la primera teoría matemática del movimiento celeste; Menecmo, el primero que trató las cónicas; o Heráclides Póntico, platónico y pitagórico que atribuyó a la Tierra la rotación diaria y compuso la naturaleza a base de vacío y átomos pasivos movidos por el principio activo de la inteligencia divina. Por todo ello, se señaló que Platón dirigía o al menos plateaba problemas a los matemáticos.[5]

El filósofo ateniense estableció numerosos criterios de rigor que debía tener una prueba matemática y señaló la supremacía de la geometría sobre la aritmética. Además, hizo de la matemática un elemento clave de su cosmovisión y herramienta pedagógica para acceder al conocimiento real de las Formas.

> El conocimiento es posible porque el Demiurgo que ordenó el caos se sirvió de armonías y razones matemáticas, lo cual explica asimismo que se pueda estudiar matemáticamente la naturaleza, ya que está regida por ellas. […] Entre los objetos sensibles y los inteligibles están los matemáticos como escalón intermedio, cuya función pedagógica es crear un estado mental entre la opinión derivada de los sentidos y el conocimiento real de las Formas, facilitando el acceso a este mediante la dialéctica.[6]

Con Platón la matemática se convirtió en un asunto esencial para quien quisiera dedicarse a la filosofía en la Academia. La tradición habla de una inscripción que figuraba en la entrada de la Academia que rezaba:

ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω.

Nadie ignorante en geometría entre aquí.

Aristóteles, por su parte, no daba primacía ontológica a los entes matemáticos, pero consideró a la matemática como un paradigma del conocimiento científico, y estableció el ideal del conocimiento demostrativo en los *Analíticos Posteriores*. A juicio del estagirita, todo conocimiento debía ser demostrado mediante silogismos a partir de definiciones y *primeros principios,* esto es, verdades evidentes por sí mismas. También

5 Solís, C., Sellés, M., *Historia de la ciencia,* Espasa, 2021, p. 81.
6 *Ibíd.*, pp. 80-81.

admitió la demostración por reducción al absurdo, pero la consideró inferior a la demostración directa porque aquélla no muestra el *por qué* de lo demostrado. El conocimiento matemático sería considerado por Aristóteles, por lo menos así lo podemos interpretar en ciertos momentos de su obra, como el más cierto porque es conocimiento de las *formas sin materia*. De este modo, pues, el resto de las ciencias serían intrínsecamente más imprecisas que la matemática en la medida en que aquéllas estarían sometidas a las imprecisiones causadas por unos objetos cuya materia –factor de imprecisión– es inseparable de la forma. Pero esta *imprecisión, fuese* como fuese, tendría que ser asumida para dar cuenta de la *naturaleza*:

> Pero siendo tan importantes como modelo de conocimiento necesario, las matemáticas no lo son todo. En efecto, los objetos de las matemáticas son formas abstraídas intelectualmente de la materia en la que se dan por necesidad; pero una vez abstraídas de la materia (los cilindros, al margen de que den forma al metal de una moneda o a la piedra de una columna), carecen de potencia y no son susceptibles de *cambio*, que es lo esencial de la naturaleza. "La minuciosa exactitud de las matemáticas no puede exigirse siempre, sino tan solo en el caso de las cosas que no tienen materia, y es de suponer que la naturaleza tiene materia." (*Metafísica*, 995a, 15-20)[7]

7 *Ibíd.*, pp. 99.

“Elementos” de Euclides

No sabemos casi nada de la vida de Euclides. Vivió en Alejandría en los siglos IV y III a.C. y compuso una obra cumbre del pensamiento griego, a saber, una obra *perfecta* que recopilaba de un modo magistral los elementos necesarios para la resolución de los problemas matemáticos desde una perspectiva general. No se sabe tampoco qué parte de “Elementos” es original de Euclides y qué parte es una recopilación de otras obras anteriores. Sea como fuere, la ordenación sistemática y deductiva a partir de axiomas de “Elementos” es atribuible casi con toda seguridad a Euclides. Las copias que tenemos hoy de “Elementos” proceden, como suele ocurrir con las obras del mundo antiguo, de la labor de conservación y transmisión que se llevó a cabo durante la Edad Media.

> La existencia de un texto que compendiaba la matemática “elemental” permitió la producción de tratados breves sobre cuestiones específicas superiores, sin necesidad de plantear cada vez los fundamentos, apoyándose en lo ya demostrador por Euclides.[8]

Método axiomático

Euclides desarrolló un método axiomático (sobre unos principios, por razonamiento deductivo, se alcanza una serie de teoremas):

- Definiciones: “Punto es lo que no tiene partes”, “Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella”, etcétera.
- Nociones comunes: “Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí”, “El todo es mayor que la parte”, etcétera.
- Postulados: Son principios más específicos que los comunes, siendo lo único que se pide, por decir así, para demostrar los teoremas de la obra. *Cada paso que se da en “Elementos” se deduce de la combinación de alguno de estos principios, o de otra proposición que se haya demostrado con anterioridad.*

Casi todos los libros (Cada libro era un rollo) que conforman “Elementos” empiezan por una definición. Las nociones comunes son conocimientos generales que van más allá de las matemáticas. Los postulados (raíz latina) no son sino axiomas (raíz griega). Cada teorema tiene una demostración realizada en diferentes pasos.

> Pero, sin duda, el logro mayor fue la invención de una estructura axiomática capaz de sintetizar deductivamente todo ese enorme conjunto de proposiciones matemáticas verdaderas. Aunque muchas de ellas fuesen conocidas, las demostraciones y la teoría que las unificaba son originales.[9]

8 Solís, C., Sellés, M., *Historia de la ciencia*, Espasa, 2021, p. 81.
9 *Ibíd.*.

Contenido de "Elementos"

Libros 1-4: Geometría plana

1. Postulados, triángulos, paralelas y paralelogramos. Teorema de Pitágoras.
2. Rectángulos (álgebra geométrica).
3. Círculos.
4. Polígonos regulares inscritos en círculos.

Estos cuatro libros formarían una unidad y, tal vez, reproduzcan gran parte de "Elementos" anteriores a Euclides.

Libros 5 y 6: Teoría de las proporciones

5. Teoría general de las proporciones (magnitudes conmensurables e inconmensurables).
6. Aplicación de la teoría de las proporciones a la geometría plana.

Libros 7-9: Aritmética

7. Proporciones y productos entre números. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
8. Números en progresión geométrica.
9. Números primos.

Libro 10: Magnitudes inconmensurables

10. Magnitudes inconmensurables.

Libros 11-13: Geometría sólida

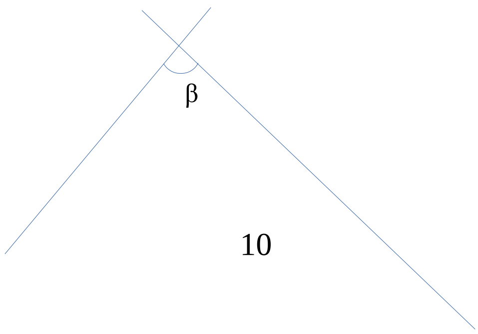
11. Elementos básicos.
12. Método de exhaución.
13. Sólidos regulares.

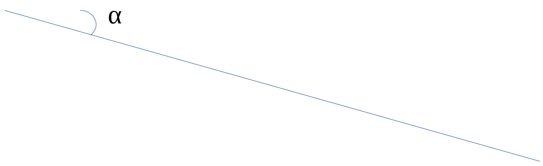
Los tres primeros postulados afirman que se pueden realizar las siguientes acciones:

- Trazar un segmento recto entre dos puntos cualesquiera.
- Prolongar un segmento recto indefinidamente.
- Trazar un círculo tomando un punto como centro a través de otro punto.

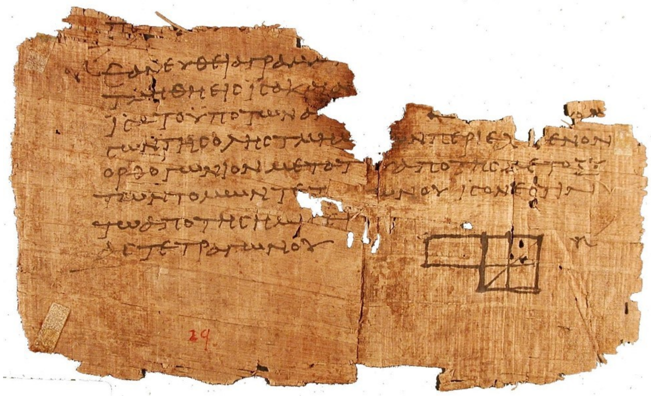
El cuarto postulado establece que todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

El quinto postulado afirma que si una recta corta a otras dos, y éstas forman ángulos en un lado de la primera menores que dos ángulos rectos, las dos rectas se cortan si se prolongan por ese lado.





Todos los libros (excepto 8-9 y 12-13) contienen “definiciones”, pero sólo el primer libro contiene “nociones comunes” y “postulados”. La ausencia de “nociones comunes” en los demás libros es lógica. Resulta extraña la ausencia de “postulados” en los otros libros de aritmética, porque ninguna de sus proposiciones es derivada de los teoremas de los libros anteriores. Desde la antigüedad ya se mostró la extrañeza referida a la diferencia cualitativa entre el quinto postulado y los otros cuatro, pensándose que tenía que ser posible deducirlo como teorema a partir de aquéllos y otras nociones básicas, lo que quedó definitivamente descartado en el siglo XIX al demostrarse su independencia.



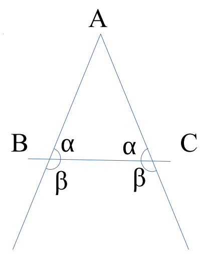
Fragmento de "Elementos" de Euclides encontado en Oxirrinco.

Algunas proposiciones de "Elementos" de Euclides

Seguidamente vamos a desarrollar unas pocas proposiciones del libro de *Euclides* para así ver, entre otras cosas, la esencial importancia que tiene la "reutilización" de otras proposiciones previamente demostradas.

Proposición 5 – Libro I (*Pons asinorum*)

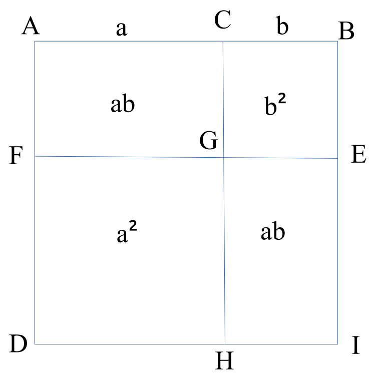
Este es el teorema que los medievales escolásticos llamaron *Pons asinorum* y cuyo título (Puente de los asnos) hacía referencia a la idea de que quienes no lograran comprender este teorema, entonces no serían capaces de ir más allá –pasar el puente– en el conocimiento de la matemática. Este teorema nos dice que si tenemos un triángulo isósceles, los ángulos de la base son iguales y, si los lados iguales se alargan, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí.



Proposición 4 – Libro II

"Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos."

En el libro II se desarrolla un "álgebra geométrica", es decir, ahí donde nosotros realizamos operaciones con ecuaciones y variables, la matemática griega realiza operaciones geométricas.



$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

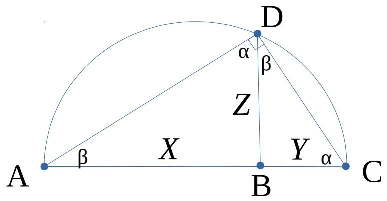
Proposición 13 – Libro VI

"Dadas dos rectas, hallar una media proporcional."

Este problema equivale a encontrar *geométricamente* una raíz cuadrada. Si Z es la media proporcional entre X e Y, luego: $Z=\sqrt{XY}\,;\frac{X}{Z}=\frac{Z}{Y}$

Resolución:

Para resolver este problema *geométricamente*: Sea X la longitud de la recta AB, e Y la de la recta BC. Formamos la recta AC combinando X e Y, que será el diámetro de un semicírculo. Sobre el punto B elevamos una recta que se interseca con el círculo en el punto D. La recta BD tiene una longitud Z que es igual a √(XY).



Demostración:

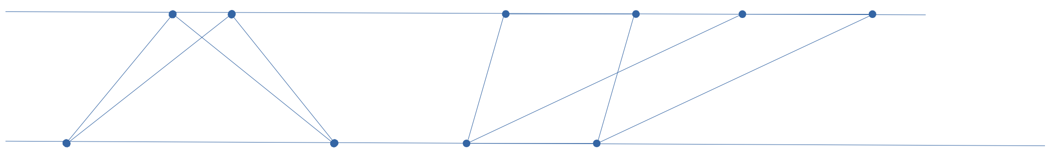
Según el segundo teorema de Tales, el ángulo en D es rectángulo. Por tanto, los triángulos ABD y DBC son semejantes y, por ello, sus ángulos son iguales. Al ser ambos triángulos semejantes, entonces AB (X) es a BD (Z) como BD (Z) es a BC (Y). Por lo que ya tenemos:

$$\frac{X}{Z}=\frac{Z}{Y}\,;Z=\sqrt{XY}$$

Proposición 47 – Libro I

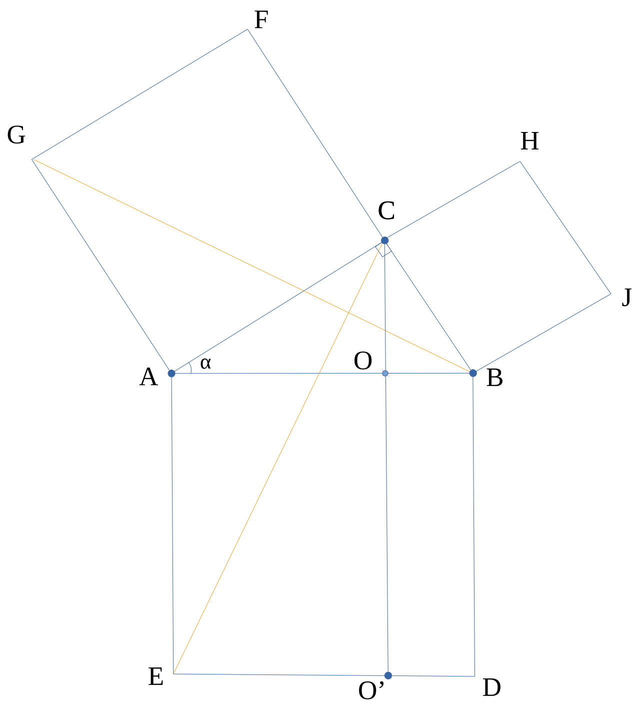
"En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto."

Este enunciado corresponde al ***Teorema de Pitágoras***. Como en el libro I todavía no se ha desarrollado el *álgebra* del libro II, la demostración de este teorema se basa en proposiciones demostradas ya en el propio libro I, en particular, en las proposiciones 36 y 37, en las que se dice que dos triángulos o paralelogramas cuyas bases son iguales y están en las mismas paralelas tienen áreas iguales.



A partir de estas proposiciones previas, pues, se puede desarrollar la demostración del **Teorema de Pitágoras**.

Demostración:



El triángulo rectángulo ACB dispone de un ángulo recto (90º) en C. Construimos tres cuadrados, el de los catetos y el de la hipotenusa (la hipotenusa es la línea que se encuentra opuesta al ángulo recto). Los triángulos AGB y ACE son iguales porque tienen dos lados iguales y, además, un mismo ángulo en A (90º + α) (así lo establece un teorema anterior en el Libro I). Ahora, aplicando los teoremas 36 y 37, observamos que el triángulo ACE y el triángulo AOE tienen el mismo área, siendo el área AOE (y por tanto el de ACE) la mitad del rectángulo AOO'E. Lo mismo podemos deducir a partir del triángulo AGB y el triángulo AGC: el área de éstos es la mitad del cuadrado AGFC. Así, pues, siendo el área de los triángulos ACE y AGB iguales, deducimos que los cuadrados AOO'E y AGFC tienen la misma área. Unas operaciones similares podríamos aplicar para acabar deduciendo que CHJB y OBDO' tienen la misma área. Por todo esto, quedaría demostrado que: $AB^2 = AC^2 + CB^2$

Proposición 20 – Libro IX

"Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta en números primos."

Demostración por reducción al absurdo:

Supongamos que todos los números primos existes son *A, B, … ,C*. Si formamos el producto *A*B* … *C* y sumamos 1, siendo D el resultado, o bien D es primo, o bien no lo es. Si D es primo, luego existe un número primo mayor que *A, B,…, C,* lo que va en contra de lo que hemos supuesto. Si D no es primo, será divisible por algún número primo según la proposición 31 de Libro VII[10]. Pero D no es divisible ni por *A*, ni por *B*, … ni por *C*, pues al dividirlo por cualquiera de ellos queda como resto 1[11]. Luego *D* será divisible por algún número primo que no está comprendido en *A, B,…,C*, en contra de lo que habíamos supuesto. Por lo tanto, *A, B,…,C* no pueden ser todos los números primos.

10 «Todo número compuesto es medido por algún número primo.»

11 Si suponemos que D es divisible por cualquier x tal que $x \in \{A, B,\dots,C\}$, entonces D/x es un número natural. Pero D/x = (A*B*C)/x + 1/x; luego 1/x es siempre un valor decimal, y en justa consecuencia D/x no es un número natural, por lo que D no es divisible por ninguna x tal que $x \in \{A, B,\dots,C\}$.

La época inmediata posterior a Euclides

La época inmediata posterior a Euclides (ss. III-II a.C.) es denominada *Edad de Oro* de la matemática griega. Se constituyó en Alejandría y en otras ciudades helénicas una comunidad de sabios entre los que destacaron Arquímides (s. III a.C.), Apolonio (S. III-II a.C.) e Hiparco (s. II a.C.).

De Apolinio sólo disponemos de su tratado *Cónicas,* y fue él quien a ciertas curvas salidas de seccionar un cono con un plano las llamó *parábola (1), elipse (2)* e *hipérbola (3).*

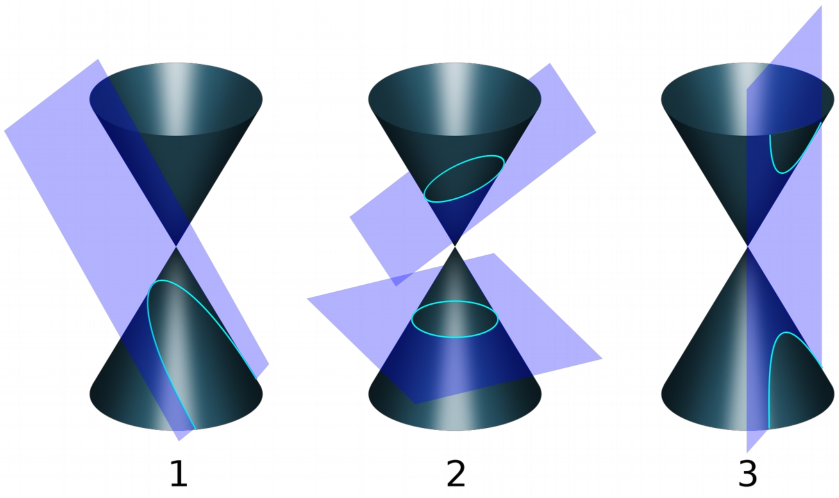


Imagen de "De Pbroks13" (wikipedia)

También fue Apolinio quien estableció los conceptos astronómicos de excéntrica, epiciclo y deferente, conceptos que después desarrollarían Hiparco y Ptolomeo.

Arquímides fue el científico griego más influyente en el desarrollo de la ciencia, sobre todo a partir de la Edad Moderna. Introdujo la noción de *peso*, esto es, una magnitud con propiedades matemáticas análogas a los de longitud y volumen, con lo que amplió el dominio de la matemática euclidiana desde la geometría pura a la mecánica (equilibro de líneas y planos) y a la *hidrostática* (teoría de cuerpos flotantes).

Astronomía griega

La visión del mundo en la antigüedad griega estaba vinculado a la mitología y, en general, se suponía la tierra rodeada por el océano, estando por debajo de ambos el Hades y, por encima, el aire y, más allá de éste, el éter. Pero a partir del s. V a.C. la filosofía griega quiso dar cuenta del mundo no con los mitos, sino con argumentos racionales. No fue un salto radical del mito al *lógos*, sino una progresiva búsqueda de razonamientos que nunca quedarían "limpios" de elementos mitológicos. Aquellos primeros astrónomos-filósofos griegos quisieron, en efecto, explicar racionalmente los fenómenos que se mostraban ante sus ojos mirando al firmamento.

En la antigua Grecia todo lo referido a los números y las cantidades se consideraba parte de las matemáticas (v.g. música, geometría, aritmética). Este era también el caso de la astronomía. Por lo tanto, las matemáticas jugarían un papel central en la astronomía griega, y con ella tratarían de explicar, entre otros fenómenos, los movimientos de los astros (sol, luna, planetas y estrellas).

Los filósofos griegos se preguntarán la causa de la retrogradación de los planetas (foto de www.ufmg.br)

El universo de Platón

Platón se va al *mito* para adjudicar al Demiurgo la construcción del cosmos a partir de un caos primitivo lleno de material informe, imponiendo un plan racional.

ὁ θεὸς ἀεὶ γεωμετρεῖ.[12]

—

El dios siempre geometriza.

El filósofo ateniense asociaba cada uno de los elementos con una figura de los sólidos regulares: el fuego con el tetraedro, el aire con el octaedro, el agua con el icosaedro y la tierra con el cubo. El dodecaedro –el sólido regular más próximo a la esfera– lo identificaba con el cosmos como un todo –en la época de Platón se consideraba el firmamento en forma esférica–.

12 Plutarco atribuye esta afirmación a Platón. Cf. Fraile, G., *Historia de la Filosofía I*, 2015, BAC, p. 311.

Platón consideraba que los cuerpos celestes y la Tierra tenían, al igual que el cosmos, forma de esfera –la figura más perfecta para los griegos–. Siendo el cosmos esférico, esto significaba que se concebía como finito. La esfera de la Tierra quedaba situada en el centro de la esfera cósmica y todos los movimientos celestes eran circulares, constantes y sin inversiones de sentido. De hecho, el esquema geocéntrico de Platón fue similar al de Aristóteles.

> Básicamente el mundo de Platón es un sistema de esferas encajadas, con la esfera terrestre inmóvil en el centro (con su capa de agua y aire) y la del cielo ígneo a continuación, limitado por la esfera de las estrellas fijas.[13]

El problema que plantea Platón a partir de su disposición cósmica, por decir así, deberá ser resuelto por los astrónomos, un problema que sintetizó Simplicio de la siguiente manera:

> Cuáles son los movimientos circulares, uniformes y perfectamente regulares que conviene tomar como hipótesis a fin de salvar las apariencias presentadas por los planetas[14]

La primera respuesta a este problema la ofreció Eudoxo (s. IV a.C.) con su modelo de esferas homocéntricas.

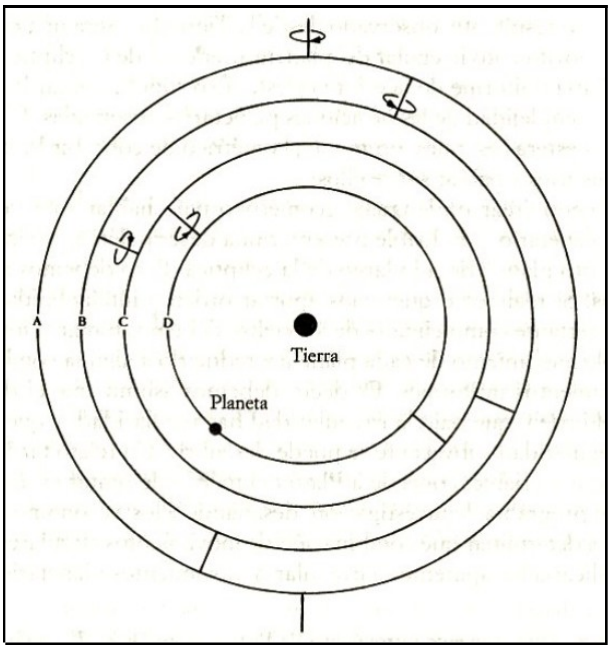
13 Solís, C., Sellés, M., *Historia de la ciencia*, Espasa, 2021, p. 84.
14 Durán, A. J., *El legado de las matemáticas*, Universidad de Sevilla, 2001, p. 133.

El modelo de esferas homocéntricas de Eudoxo (s. IV a.C.)

Para empezar, tengamos presente lo siguiente:

> El influjo de la filosofía platónica impulsó el desarrollo de teorías geométricas sobre el movimiento de los astros, la primera de las cuales se debió a Eudoxo de Cnido en la primera mitad del siglo IV a.C.[15]

La hipótesis de Eudoxo consiste principalmente en suponer las esferas encajadas unas con otras, centradas en la Tierra –homocéntricas– y con movimientos uniformes de giro. Cada fenómeno periódico se traduce en una esfera de movimiento uniforme.



Modelo de esferas de Eudoxo para un planeta (Imagen publicada en phylosophyforlife.blogspot.com)

Las *ventajas* de este modelo era una: **permitía explica el fenómeno de la retrogadación** gracias a la trayectoria producida por el movimiento de las esferas interiores (hipopeda[16]). Entre sus *inconvenientes*: **no era un sistema sistemático**, pues no integraba todos los planetas en un solo modelo –Aristóteles consiguió su integración–, con lo que, además, complicaba la composición del universo; **no explicaba la variación en intensidad lumínica de los planetas, ni en su velocidad de giro**; **no era capaz de predecir con exactitud la posición de los planetas**, y por esto era poco útil para realizar predicciones de los movimientos de retrogradación.

15 Solís, C., Sellés, M., *loc. cit.*.

16 La hipopeda es una curva con forma de 8 en la superficie de una esfera. La palabra hipopeda deriva de ἱπποπέδη, que significa grillete de caballo.

Dos direcciones

En la época de Aristóteles, esto es, en el s. IV a.C., los filósofos-astrónomos se dividen en dos corrientes que se complementan, a saber, la realista y la instrumentalista.

Realista

Se apoyan en la cosmología física de Aristóteles. Plantean averiguar los procesos físicos que determinan la posición de los planetas y que sirven para explicar por qué el planeta está en ella. ¿Cómo integrar las esferas de los planetas en un sistema físicamente viable? ¿Cómo se transmiten los movimientos de una esfera a otra?

Instrumentalista

Tratan de *salvar las apariencias* –expresión de Simplicio– con exactitud mediante movimientos circulares, desarrollando modelos matemáticos que no entran, a diferencia de los realistas, en aspectos físicos. Entre los instrumentalistas se encuentran Apolonio de Perga (s. III-II a.C.) y Claudio Ptolomeo (s. II d.C.).

El modelo de Apolinio y Ptolomeo

Los principios fundamentales de este modelo los encontramos en el *Almagesto* (título original: *Μαθηματικὴ Σύνταξις*):

- El universo es esférico y sus movimientos de rotación.
- La Tierra es una esfera.
- La Tierra está en el centro del cosmos.
- La Tierra no se mueve.
- En relación con la distancia a las estrellas fijas (la esfera más alejada de todas), la tierra no tiene un tamaño apreciable, y puede ser considerada un punto matemático.

<u>¿Cómo explicar la variación del brillo de los planetas?</u>

Apolino de Perga lo explicó por medio del **epiciclo** y el **deferente**:

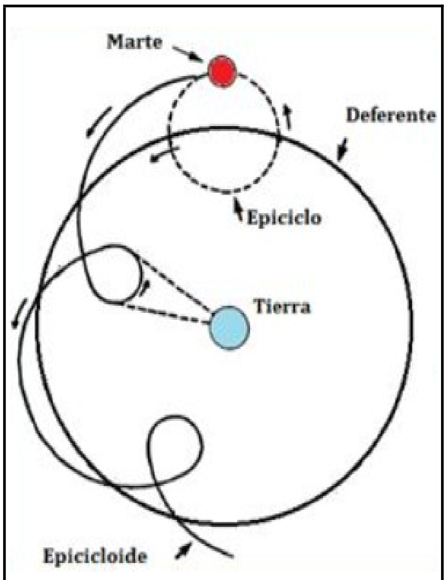
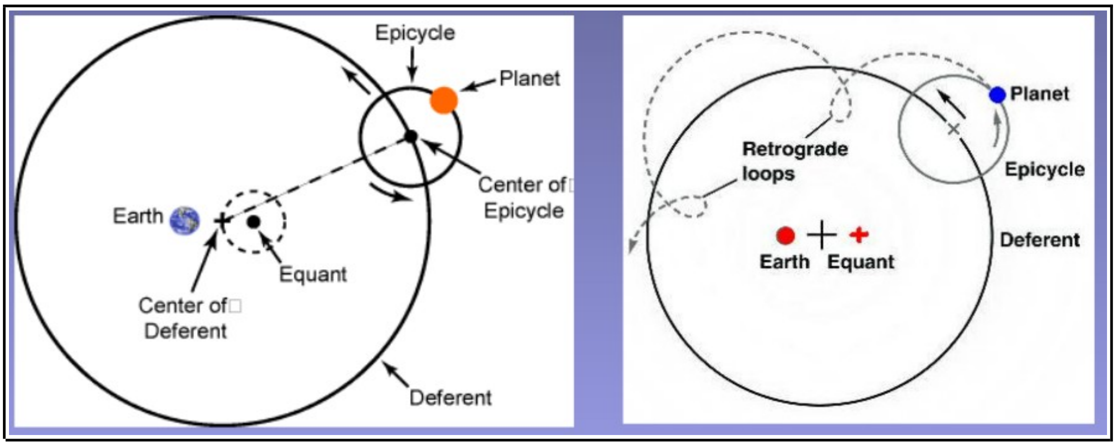


Imagen publicada en vicmat.com

A través de este modelo, Apolinio conseguía mayor exactitud en las predicciones de los movimientos de retrogradación. También daba cuenta de por qué en la retrogradación el planeta tiene fases en que brilla más: se acerca a la Tierra en su movimiento de retrogradación. Ptolomeo añadiría después a este modelo de Apolinio más epiciclos para ganar precisión.

La innovación que introduce **Ptolomeo** respecto al sistema de epiciclos y deferentes de Apolinio es la de los **ecuantes**:



La velocidad de giro del centro del epiciclo no es uniforme respecto al centro del deferente, sino con respecto al punto ecuante. **De esta manera Ptolomeo resuelve la cuestión de que hay planetas que no se muestran girando a una velocidad constante.**

El conflicto entre la astronomía aristotélica y la ptolemaica

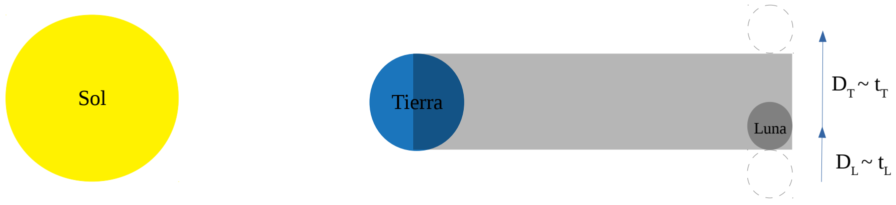
El conflicto existente entre la cosmología de Aristóteles y la de Ptolomeo se puede resumir en dos cuestiones:

- Una cuestión geométrica: Aristóteles (igual que Platón) supone un cosmos de esferas concéntricas (del mismo modo que Eudoxo), en tanto que Ptolomeo recurre al sistema de epiciclos de Apolonio.
- Una cuestión física: la excéntrica y el ecuante parecen no poder recibir una justificación física a partir de la teoría de Aristóteles, para quien lo característico de los cielos es la perfección, siendo para el estagirita el movimiento regular en círculo el más perfecto.

Con Aristóteles todas las esferas tienen como centro común la Tierra. Con Ptolomeo, en cambio, ningún cuerpo gira alrededor de la Tierra, sino que todos lo hacen en torno un punto geométrico que carece de entidad física, lo que es inconcebible desde un punto de vista aristotélico. En definitiva, el punto ecuante y la excentricidad (el mayor o menor acercamiento a la Tierra) implica que los planetas no siguen un movimiento natural desde la óptica aristotélica (el movimiento natural para el estagirita sería circular y uniforme en torno a la Tierra).

La medición del mundo de Aristarco de Samos

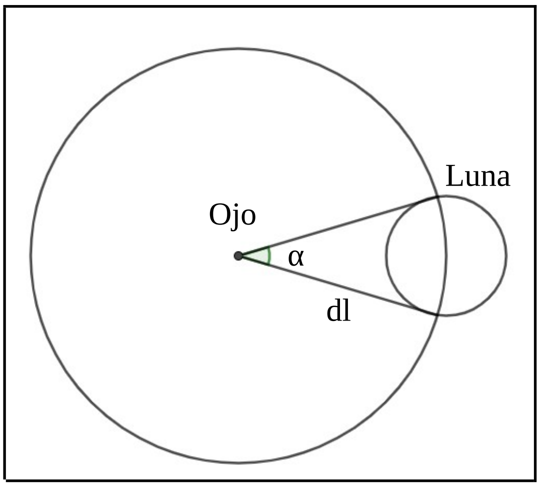
Aristarco de Samos (310-230 a.C.) desarrolló **un método para medir el tamaño del Sol y de la Luna**, en relación al diámetro de la Tierra (cuyo tamaño desconocía).



D = diámetro (tierra, luna); t_L = tiempo que tarda en penetrar la luna en la sombra; t_T = tiempo que tarda la luna en atravesar la sombra

Aristarco descubrió que $t_L/t_T = D_L/D_T = 0{,}36$. El tamaño de la luna lo estimó midiendo el tiempo que tardaba en atravesar la sombra de un eclipse

También calculó **la distancia Tierra-Luna**, a partir del diámetro de la Luna y el ángulo que ésta ocupa en el firmamento.



Aristarco midió $\alpha = 2°$, de modo que $sen(\alpha) \sim 0{,}035$ (en realidad $\alpha = 0{,}5°$, de modo que $sen(\alpha) \sim 0{,}0087$. Tenemos que $sen(\alpha) = D_L/d_l$, donde D_L es el diámetro de la Luna y d_l la distancia de la Tierra a la Luna. Eratóstenes había calculado que el radio de la Tierra era de unos 6.366 km, y Aristarco había establecido –como acabamos de ver– que $D_L/D_T = 0{,}36$. Por tanto: $D_L = D_T*0{,}36$; $D_L = 6.366*2*0{,}36$ km = 4583km. Por lo anterior: $sen(\alpha) = D_L/d_l$; $d_l = D_L/sen(\alpha)$; d_l = 4583 km/0,035 ~ 130.000 km (en realidad son unos 385.000 km).

Eratóstenes de Cirene

Eratóstenes (276-195 a.C) escribió la obra sistemática *Geographika* en tres volúmenes:

1. Revisa críticamente a sus predecesores y expone las investigaciones acerca de la forma de **la Tierra, que él creía una esfera inmóvil.**
2. Contiene lo que hoy se llamaría una geografía física, incluyendo un ensayo acerca del tamaño de la Tierra.
3. El último libro versa sobre la geografía política.

El tamaño de la Tierra

Para realizar este cálculo, Eratótenes necesitó ciertas informaciones que simultáneamente se daban en dos puntos geográficos: Alejandría y Siena (Egipto).

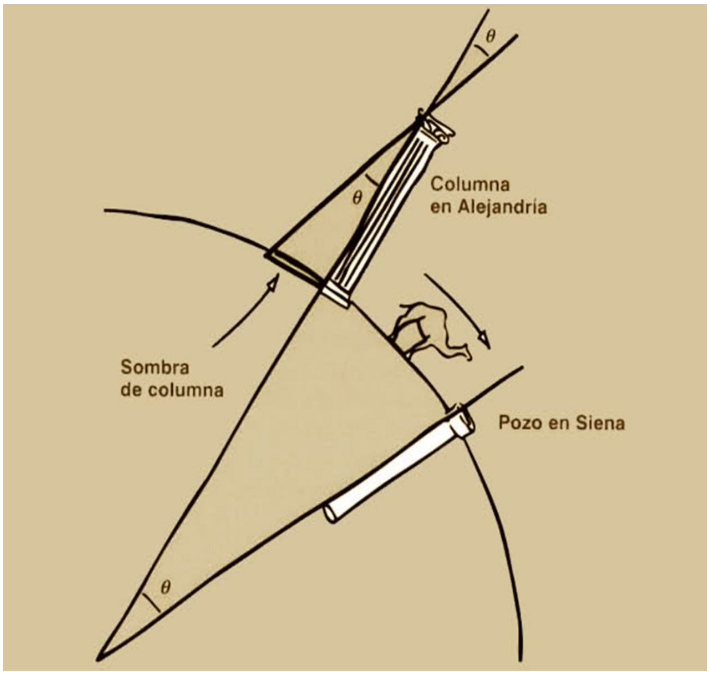


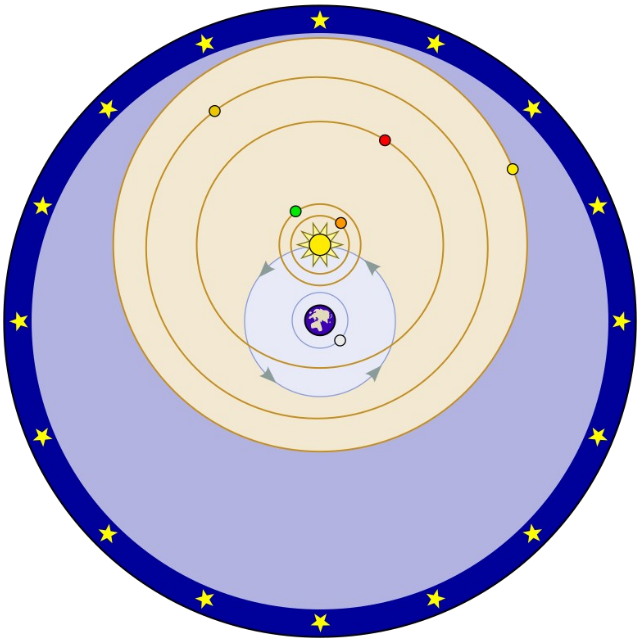
Imagen publicada en www.um.es

La imagen representa los datos que recoge Eratóstenes en un día de solsticio de verano, esto es, cuando al mediodía los rayos del sol caen en vertical sobre el paralelo del trópico de Cáncer, paralelo sobre el cual quedaba situada Siena y un pozo en cuyo fondo, a causa de la referida verticalidad, se veía reflejado el sol por entero. Pues bien, el cirenaico se preocupó de disponer también del ángulo θ (7,2º) resultante de confrontar la sombra proyectada por un elemento vertical en Alejandría –como por ejemplo la columna de la imagen– respecto a la altura del referido elemento vertical.

El ángulo θ es el mismo que el ángulo del triángulo cuyo vértice queda situado en el centro de Tierra, siendo los dos otros vértices de este triángulo los puntos que representan la columna (Alejandría) y el pozo (Siena). Además de θ, otro dato del que disponía Eratóstenes era el de la distancia entre Alejandría y Siena, a saber, unos 800 kilómetros (L). Por tanto, ahora ya se puede calcular el radio de la Tierra (R) y, en justa consecuencia, determinar su tamaño:

$$\theta/360 = L/(2\pi R) \; ; \; R = 360L/(2\pi\theta) \; ; \; R = 360*800 \text{ km}/(2*3{,}1416*7{,}2) \sim 6.366 \text{ km.}$$

Modelo de Thyco Brahe:



Modelo de Thyco Brahe

Lectura "Las infinitas vidas de Euclides"

Alejandría: el geómetra y el rey

En Alejandría estaba el Museo –santuario de las musas–, lugar donde se concentraban poetas, gramáticos, filósofos, geómetras, etcétera, es decir, los académicos –unos cuarenta sabios en torno al siglo II a.C.–. Entre esos académicos estaba Euclides. La biblioteca de Alejandría –creada bajo el reinado del hijo de Ptolomeo I Sóter– atesoraba también los *Elementos* de Euclides.

Euclides –y quizás otros matemáticos– introdujo la «sólida tradición de la geometría griega»[17]. Con él se desplegó de forma escrita todo un razonamiento geométrico que era imposible transmitirse oralmente. *Elementos* de Euclides definió la matemática en occidente durante dos mil años.

> Sus componentes eran el enunciado (de algo que debe demostrarse), el diagrama con sus elementos etiquetados con letras y una cadena de razonamiento desde las cosas ya sabidas hasta las cosas nuevas que se demuestran.[18]

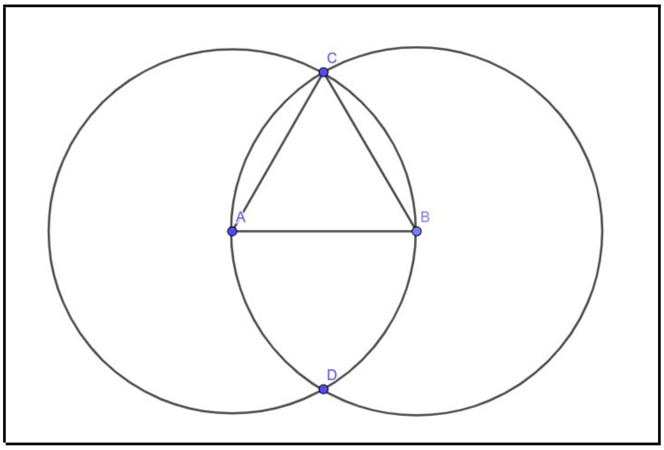
Veamos un ejemplo:

"Cómo trazar un triángulo equilátero" (proposición)

Partimos de una línea recta cualquiera, cuyos extremos denominamos A y B. Ahora trazamos dos círculos, cada uno con un radio igual a la longitud de la recta AB: uno centrado en A y el otro centrado en B. Los dos círculos se cortan en dos puntos. Escogemos uno de ellos que llamamos C. Ahora unimos A, B y C. Forman un triángulo equilátero.

¿Por qué?

Gracias al modo que se ha usado la distancia A y B para hallar C, C está a la misma distancia que A y que de B. Es decir, los tres lados del triángulo, AB, BC y CA son de una misma longitud. En consecuencia, es un triángulo equilátero. Que es lo que se había que trazar[19].



17 Wardhaugh, B., *Las infinitas vidas de Euclides*, Shackleton, 2020, p. 20.
18 *Ibíd.*, p. 22
19 Cada enunciado (proposición) se cierra con la frase "lo que había que demostrar" (hóper édei deíxai) o "quod erat demostrandum", QED. A veces también: "lo que había que trazar", "lo que había que contruir".

Según diversas informaciones, existían diferentes recopilaciones de conocimientos geométricos un siglo antes de Euclides. Estas recopilaciones no han llegado hasta nosotros y hay serias dudas sobre la veracidad de tales informaciones. Sea como fuere, ¿cuál fue la tarea que desarrolló Euclides? Recopiló el material conocido por los geómetras en su tiempo y lo organizó en *Elementos*. Nadie puede identificar qué cosas *nuevas* añadió Euclides *de cosecha propia*.

> Euclides, una pieza más del Museo, se convirtió, a su vez, en conservador, siendo los *Elementos* su propio Museo en miniatura.[20]

En *Elementos* hay 400 proposiciones y trece libros (o capítulos). El primer libro empieza con unas definiciones que a veces son obvias, pero esto le importaba poco a Euclides. El matemático griego elaboró con *Elementos*, por decir así, una caja de herramientas para los geómetras. Pero si las primeras páginas de *Elementos* son bastante obvias o fáciles de entender, a medida que se avanza en los libros, la dificultad crece.

> […] en su conjunto los 'elementos' son un espectáculo digno de un virtuoso, una ruta que sólo las mentes geométricas más sagaces podían seguir hasta el final.[21]

La dificultad para "hacerse" con los conocimientos geométricos que guardan los libros de *Elementos* es evidente, una dificultad que experimentó, según cuentan algunas historias, el mismísimo rey Ptolomeo. Cuando éste preguntó por qué era tan difícil la geometría y si había un camino más sencillo para superar sus dificultades, el geómetra le respondió: "No hay Camino Real hacia la geometría"[22].

---

20 Wardhaugh, *loc. cit.*, p. 24.
21 *Ibíd.*, p. 26.
22 El Camino Real era la carretera persa construida por Darío I que unía Susa –centro neurálgico del imperio– con Sardes.

Elefantina: cascotes de cerámica

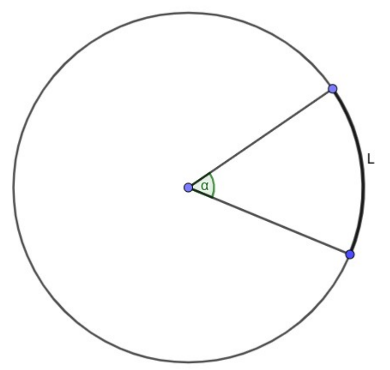
Los manuscritos originales de *Elementos* no han "sobrevivido" salvo unos siete papiros. Los primeros siglos tras su redacción, *Elementos* se copió por todo el mundo de cultura helénica. Otra vía por la que ha llegado a nosotros ciertos fragmentos de *Elementos* ha sido la de los *óstracos* –cascotes de cerámica– de la isla de Elefantina (en el río Nilo). Estos *óstracos* del s. III a.C.[23] son seis y sus anotaciones hacen referencia a las complejas proposiciones finales de *Elementos*. Los textos de estos cascotes de cerámica son diferentes a los textos que encontramos en publicaciones posteriores de *Elementos* . Este hecho refuerza la idea –asevera Benjamin Wardhaugh– de que *Elementos* servía como guía práctica, esto es, el estudiante se ejercitaba siguiendo (y anotando en los *óstracos*) los pasos marcados por tal guía. Pero el aprendizaje de la geometría griega no era sólo un acto "privado", sino también un acto "público":

> […] la geometría griega era, sobre todo, una representación en la que se trazaba un diagrama y se hablaba de él, a uno mismo o ante una audiencia.[24]

23 Recuérdese que *Elementos* fue publicado en torno al año 300 a.c..
24 Wardhaugh, B., *Las infinitas vidas de Euclides*, Shackleton, 2020, p. 36.

Teón de Alejandría: la edición de los ‘Elementos’

Teón fue en torno al año 360 d.C. –explica Wardhaugh–, el último empleado del Museo de Alejandría. Añadió un apartado propio en la proposición 33 del libro VI de *Elementos*. En esta proposición se afirma que si consideramos un sector circular, la longitud del arco se halla siempre en proporción con el ángulo que forman las dos rectas en el centro.



L se halla en proporción con el ángulo α

A esta afirmación, Teón añadió que el área del sector circular también se halla en proporción con el ángulo del centro.

> Lo que para uno es una interpolación de Teón, para otro es todo un gazapo euclidiano.[25]

Teón fue padre de Hipatia (ca. 355-415 d.C.). Hipatia era profesora de filosofía y su docencia incluía la docencia.

> Parece bastante seguro que hubo un período en que Hipatia y Teón trabajaron juntos sobre material matemático y astronómico.[26]

Pero resulta imposible saber si Hipatia[27] introdujo algún cambio o añadido en *Elementos*.

25 Wardhaugh, B., *Las infinitas vidas de Euclides*, Shackleton, 2020, p. 51.
26 *Ibíd.*, p. 54.
27 «Sin duda, era un personaje bien conocido en la ciudad [Alejandría] […] la mayoría de sus estudiantes identificables eran (o luego fueron) cristianos, y no parece que su paganismo representara problema alguno. Sin embargo, hacia la década de 410, su protector, el prefecto romano (Orestes, otro cristiano) se enzarzó en un violento conflicto con el patriarcado de Alejandría y en marzo de 415 Hipatia fue asesinada en una especie de represalia; en palabras de un historiador de la Antigüedad, fue una víctima de rivalidades políticas. Desde el siglo XIX, su trágica historia ha sido llevada a la ficción, a veces de un modo algo sensacionalista.» (*Ibíd.)*

Al-Hayyay: Euclides en Bagdad

Los abbassíes[28] habían llegado al poder en el año 750, con lo que se produjo un choque, pero también un encuentro entre diferentes culturas-religiones –cristianos, musulmanes, zoroastrianos, judíos, etcétera–. Bagdad se convirtió en la capital del imperio y, además, en un centro de conocimiento.

> Habiendo fundado Bagdad, el califa Abu Ya'far al-Mansur «[…] despachó emisarios al emperador bizantino y le pidió que le enviara traducciones de obras matemáticas. El emperador le envió el libro de Euclides y varias obras de física. Los musulmanes leyeron y estudiaron su contenido; y creció su apetencia para obtener el resto.»[29]

La corte en Bagdad experimentó un gran ambiente cultural que se propagó por entre la sociedad acaudalada, de donde salieron numerosos mecenas intelectuales. Se fundó la *Casa de la Sabiduría*, lugar en el que se concentraba el conocimiento filosófico y científico. Bagdad llegó a tener más de cien libreros.

Los traductores de Bagdad, por su parte, tuvieron que crear un nuevo lenguaje científico para poder traducir los textos griegos: unas veces creaban nuevos términos, otras veces los adaptaban. Y en medio de esta actividad cultural, el traductor de *Elementos* en *el corazón del mundo*[30] fue al-Hayyay –hijo de una culta familia cristiana–, quien también tradujo el *Almagesto* de Claudio Ptolomeo.

28 En el año 750 tiene lugar la revolución abbasí, lo que produce la caída de los omeyas y el ascenso al poder de Abul Abbas.

29 Wardhaugh, B., *Las infinitas vidas de Euclides*, Shackleton, 2020, p. 70.

30 El centro del mundo era Bagdad y el califa aglutinaba los títulos de enviado de Dios, jefe de la oración y jefe de la guerra.

Adelardo: Euclides en latín

En el siglo XI los cristianos reconquistaron buena parte de la península Ibérica y los normandos Sicilia. Esto posibilitó que numerosos libros escritos en árabe y en griego fuesen traducidos al latín. También contribuyó a este "traspaso" de conocimiento a occidente las cruzadas en el levante mediterráneo.

> Saladino subastó la famosa biblioteca fatamí a partir de 1171 […] y en 1204, Constantinopla, la cima de la cultura de los manuscritos bizantinos, cayó en manos de los cruzados de Occidente.[31]

Se tradujo *Elementos* del árabe al latín gracias a una corriente de traducción impulsada por maestros profanos itinerantes. Florecieron traductores en Barcelona, Segovia, León, Pamplona, Tolosa, Besièrs, Narbona, Marsella, etcétera. Toledo se convirtió en un centro de traducción especialmente importante.

> Buena parte de la ciencia y el saber árabes fue traducida al latín durante el siglo XII; sus consecuencias fueron incalculables.[32]

La primera traducción de *Elementos* al latín la realizó Adelardo de Bath. Nació en el año 1080, esto es, poco después de la conquista normanda de Inglaterra. Estudió artes liberales en Tours (Francia) y alcanzó profundos conocimientos de astronomía, música, filosofía, etcétera. Viajó a Oriente y obtuvo allí numerosos textos científicos en árabe, entre ellos *Elementos*. Al regresar a Inglaterra tradujo la obra de Euclides con la ayuda, seguramente, de alguien versado en el árabe. En poco tiempo, la versión latina de *Elementos* de Adelardo pasaría al conjunto de nuevas universidades –de Italia a Inglaterra–. Después de la traducción de Adelardo se realizaron diversas versiones de *Elementos*, siendo la de Campano de Novara (ca. 1250) la que se iba a imponer durante la Baja Edad Media.

> […] pero gracias a Campano sobrevivió gran parte del esfuerzo de Adelardo por traducir las palabras de Euclides al latín.[33]

31 Wardhaugh, B., *Las infinitas vidas de Euclides*, Shackleton, 2020, p. 77.
32 *Ibíd.*, p. 78.
33 *Ibíd., p. 86.*

Erhard Ratdolt: La impresión de los "Elementos"

A finales de siglo XV la Serenísima República de Venecia era un centro comercial y empresarial con un magnífico puerto. En esta ciudad-Estado estaba la imprenta de Erhard Ratdolt, de donde salieron más copias de *Elementos* de Euclides en los primeros meses de 1482 que las realizadas en toda Europa en mil años. Ratdold formaba parte de la diáspora alemana que llevó la invención de Gutenberg por toda Europa a mediados del siglo XV. Venecia se convirtió con Ratdold en uno de los principales focos de la tecnología de la imprenta. Los libros que salían de esta imprenta –obras eclesiásticas, históricas y matemáticas– eran magníficos. *Elementos* fue impreso en formato grande (infolio) y alcanzó las 276 páginas. Para hacer realidad la versión impresa de *Elementos*, Ratdold desarrolló una nueva técnica con la que pudo incorporar diagramas de alta calidad –diagramas geométricos[34].

> Los *Elementos* necesitaban quinientos o más y, tal como señaló Ratdolt, no se puede entender nada de geometría sin unos buenos diagramas.[35]

La explosión de *Elementos* impreso tuvo lugar a lo largo del siglo XVI.

> A finales de ese siglo [s. XVI], los *Elementos*, o fragmentos de ellos, se habían publicado ya en alemán, francés, español, inglés y árabe. No parece que ningún otro texto, excepto la Biblia, pasara por las imprentas con más frecuencia que este, una tendencia que se mantendría durante dos siglos más.[36]

De las copias que han sobrevivido de "Elementos" de Ratdolt, muchas tienen en sus páginas notas y diagramas de quienes fueron sus lectores.

34 Después de Gutenberg, Ratdold se convirtió en el impresor más innovador.
35 Wardhaugh, B., *Las infinitas vidas de Euclides*, Shackleton, 2020, p. 93.
36 *Ibíd.*, pp. 97-98.

Edward Bernard: Minerva en Oxford

Edward Bernard (1638–1697) se convirtió en profesor de Astronomía de la Universad de Oxford. En ese momento Oxford era uno de los pocos lugares donde se podían encontrar manuscritos de *Elementos* en griego, árabe y latín. Y el profesor Bernard tenía un sueño, a saber, publicar una nueva edición del libro de Euclides. Esta nueva edición tenía que constituirse, a juicio del profesor, a partir de una unificación de diferentes ediciones antiguas en griego, latín y árabe. Pero el sueño del profesor no se cumplió, pues resultó ser su *Elementos* políglota, demasiado complejo para hacerse realidad

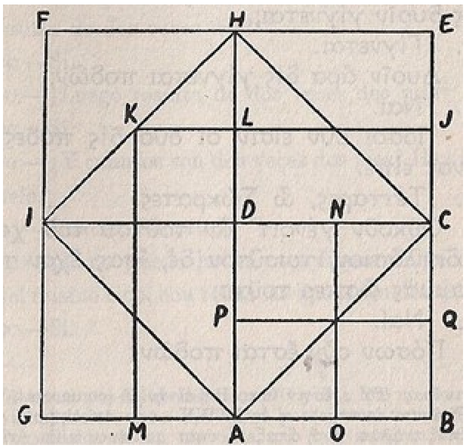
Después de la muerte de Bernard, la vacante que había dejado fue ocupada por David Gregory, quien publicó, tiempo después, un *Elementos* en griego y latín, sirviéndose, entre otros recursos, de los trabajos que había realizado Bernard. La edición de Gregory era una versión reducida que en poco (o casi nada) se podía identificar con el sueño de Bernard.

> Uno de sus escasos ornamentos era una ilustración en la portada que mostraba a Minerva con su escudo, casco y lanza ante un panorama de Oxford [...][37]

37 Wardhaugh, B., *Las infinitas vidas de Euclides*, Shackleton, 2020, p. 116.

Platón: Menón y el esclavo

En el diálogo *Menón* de Platón, Sócrates mantiene un diálogo –sistema de preguntas y respuestas– con el eslavo Menón, logrando el filósofo que aquél manifieste un conocimiento que ya estaba latente en su alma (teoría de la reminiscencia platónica[38]). El objetivo de Platón en este diálogo no es otro que discutir el origen del conocimiento. Pero más allá de este objetivo, con este diálogo tenemos ante nosotros el único testimonio de la antigua Grecia que nos informa de cómo se desarrollaba un procedimiento geométrico para llegar a ciertas verdades: haciendo representaciones a través de diagramas a partir de los que se van deduciendo cosas sobre ellos.



Es evidente la importancia que tenía la geometría en la filosofía de Platón: la geometría la consideraba una fuente de ideas y ejemplos en su filosofía. Ahora bien, en el filósofo ateniense no concebía la geometría como un fin en sí mismo, sino como un medio para avanzar en el pensamiento filosófico. Lo cierto es que se exageró el interés de Platón por la geometría a lo largo de la historia[39]. Históricamente –durante más de dos mil años– se ha vinculado Euclides con Platón y esta vinculación ha resultado estar fundamentada con una confusión, a saber: creer que Euclides de Mégara era el Euclides de *Elementos*.

> Sócrates marcó acaso de un modo inconsciente el inicio del culmen de la filosofía griega. A partir de sus enseñanzas emergieron diferentes escuelas, algunas de ellas antagónicas entre sí, lo cual no es de extrañar dada la compleja y “manipulada” figura de Sócrates. Fundaron escuelas Platón, Fedón, Antístenes, Aristipo y Euclides. […] La fundó [la escuela megárica] Euclides de Megara. Combina la doctrina socrática con la de Parménides, es decir, el Bien socrático con el ser del eleata. Busca con ello un fundamento ontológico de la moral.[40]

38 «Lo propio del alma es el pensamiento. El alma se pone en relación con las realidades inteligibles, esto es, con las Ideas. Hay parentesco entre las almas y las Ideas. El alma es una realidad eterna, concreta e invisible que participa de la Idea de Vida (ζωῆς εἶδος). Tal eternidad le otorga su estatus de preexistencia respecto al cuerpo y la posibilidad de la reminiscencia.» (Moa, F., *De Tales a Aristóteles: Lo esencial*, 2021, pp. 110-111).

39 La tradición habla de una inscripción que figuraba en la entrada de la Academia que rezaba: ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω (Nadie ignorante en geometría entre aquí).

40 Moa, F., *De Tales a Aristóteles: Lo esencial*, 2021, p. 72 y p.74.

Proclo Diádoco: Minerva en Atenas

A mediados del siglo V Proclo Diádoco[41] era el director de la escuela platónica en Atenas. En la Academia estaba instalada la creencia de que *Elementos* era un importante recurso filosófico. Proclo, desde su posición neoplatónica, concebía la realidad en tres niveles, siendo uno de estos niveles el lugar en el que "habitaban" los objetos matemáticos[42]:

- El Uno, que se aprehende con el intelecto.
- El mundo intermedio, ahí donde se encuentran los objetos matemáticos. Estos objetos matemáticos tienen, por un lado, atributos que sólo se alcanzan con el intelecto (eternidad, inmutabilidad, etcétera) y, por otro, atributos que son comunes con el mundo físico (forma, tamaño, etcétera).
- El mundo físico que se aprehende por medio de los sentidos.

En cuanto a *Elementos* –Los miembros de la Academia consideraban que la obra de Euclides estaba inspirada por Platón– , que era algo así como una puerta de acceso a ese mundo intermedio, Proclo observaba algunas debilidades en el tratado de Euclides. Su idea de proposición geométrica era más pulcra y elaborada que la de *Elementos* –a veces, por ejemplo, aparecen en *Elementos* algunas demostraciones que no son nada ordenadas; también tiene saltos lógicos y suposiciones no específicas que el mismo Proclo advirtió–. Los intentos de Proclo de arreglar estas debilidades abrieron la puerta a una investigación posterior que duraría siglos y que sería muy fructífera.

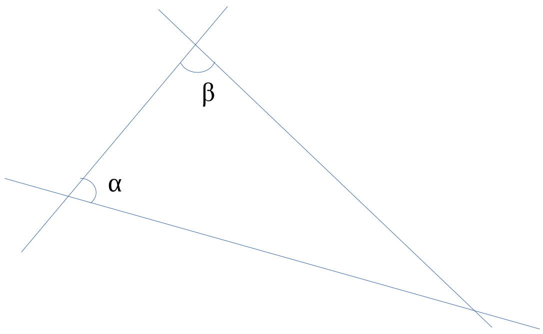
41 «Desde comienzos del siglo v encontramos al neoplatonismo instalado en la propia "Academia" de Atenas. Tras Plutarco de Atenas y Siriano, recae en Proclo, que había sido sido discípulo de ambos, la condición de διάδοχος ("sucesor").» (Marzoa, F. M., *Historia de la filosofía I*, p. Akal, 2010, p. 254).

42 Este lugar intermedio que ocupan las matemáticas también fue concebido por Platón: «Matemáticas: Ocupa un lugar intermedio entre el mundo de la δόξα y el de la ciencia perfecta (νόησις). En este ámbito se desarrolla la astronomía. Según Aristóteles, Platón en su enseñanza oral (ἄγραφα δόγματα) habría colocado entre los seres sensibles y el mundo de las Ideas un plano intermedio (entidades reales y subsistentes a la manera pitagórica).» (Moa, F., *De Tales a Aristóteles: Lo esencial*, 2021, p. 94)

Leví ben Gershon: Euclides en Hebreo

Elementos de Euclides empieza con afirmaciones preliminares que no son específicas de la geometría (v.g. "el todo es mayor que la parte"). En esta obra existe un postulado que ha sido cuestionado a lo largo de la historia, a saber, el *quinto postulado* (conocido como *Postulado de las paralelas*):

> [Postúlese que] si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.



Este postulado expresa la siguiente idea intuitiva: si dos rectas no son paralelas, acabarán cortándose en algún punto. Las críticas históricas al referido postulado señalan que éste es excesivamente enrevesado, prolijo, y, entre las críticas más amables, lo consideran poco elegante.

Leví ben Gershon (s. XIV), un gran filósofo, científico y astrónomo de su época, trató de resolver este problema del *Postulado de las paralelas*. En la Edad Media se había traducido al hebreo *Elementos* desde fuentes griegas, musulmanas y latinas. Gershon, consideraba los objetos matemáticos como abstracciones de la realidad –que habían sido constituidas gracias a los sentidos y la razón– que eran imprescindibles para la educación filosófica. Trató de optimizar las definiciones de *Elementos* y, claro está, mejorar el *quinto postulado*. Pero este intento de Gershon resultó fallido.

> […] por desgracia consiguió poco más que sustituir un elemento dudoso con otro igualmente dudoso.[43]

43 Wardhaugh, B., *Las infinitas vidas de Euclides*, Shackleton, 2020, p. 153.

Christopher Clavius: Los 'Elementos' jesuíticos

En el año 1574 se publicó la primera edición de *Elementos* de Euclides en la versión de Christopher Clavius de la Compañía de Jesús fundada por Ignacio de Loyola. Clavius había entrado en esta compañía a los diecisiete años. Estudió en la universidad de Coímbra (Portugal) y se convirtió en un experto en matemáticas, llegando a ser profesor de esta disciplina en la escuela jesuita de Roma (el Colegio de Roma). Fue Clavius una autoridad respetada en matemáticas y astronomía.

A finales del siglo XVI había unos ocho mil jesuitas que gestionaban unas doscientas cincuenta escuelas. Clavius hizo campaña para que las matemáticas tuvieran un papel destacado en el plan de estudios. La importancia de esta materia estaba fundada en una tradición que venía de Platón y pasaba por Proclo[44]. Esta tradición, llamésmola platónica, sustentaba que las matemáticas eran esenciales para el conocimiento de la realidad, y así, sobre la base matemática euclidiana, grandes figuras del conocimiento (ciencia) descollaron en aquella época:

> Copérnico, Galileo y Kepler, por citar solo unos pocos, absorbieron todos los comentarios de Proclo sobre Euclides.[45]

En el siglo XVI se editaron diferentes versiones de *Elementos* que trataban de mejorar los postulados y las nociones comunes. En este contexto Clavius publicó su *Elementos*, en el que sintetizaba versiones antiguas y contemporáneas, añadiendo corolarios, comentarios propios y algunas proposiciones nuevas. Además, apoyándose en Platón, subrayaba la importancia de las matemáticas y su vínculo con la filosofía. Asimismo, citaba a Proclo y hacía referencias a la tradición cristiana en el uso de las matemáticas en la teología. Otro aspecto que también remarcaba era la importancia de los usos prácticos de las matemáticas, observando una relación entre los diagramas con aspectos físicos de lo que representaban.

> Así pues, Clavius reunió dos enfoques respecto a la matemática: el teórico y el práctico. El primero veía la geometría como una vía hacia las verdades universales; el segundo, como un arte práctico, un utensilio para finalidades mundanas.[46]

Dicho en pocas palabras, el *Elementos* de Clavius unía dos facetas: la práctica y la intelectual. Esta unión sería la hoja de ruta de la revolución científica, lo que denota la importancia de la versión de *Elementos* de Clavius.

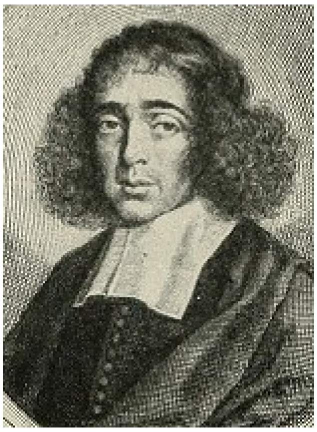
> La edición [de Clavius] se convirtió en un punto de referencia en cualquier discusión acerca de la naturaleza de la geometría euclidiana durante unos doscientos años y se ha calificado, con razón, como la edición más importante de Euclides jamás publicada.[47]

44 A mediados del siglo V Proclo Diádoco era el director de la escuela platónica en Atenas.
45 Wardhaugh, B., *Las infinitas vidas de Euclides*, Shackleton, 2020, p. 161.
46 *Ibíd.*, p. 164.
47 *Ibíd.*.

La enseñanza matemática con Euclides fue incluida en el plan oficial de estudios de las escuelas jesuitas a partir de 1599. Un cuarto de millón de niños y adolescentes a cargo de los jesuitas estudiaron la versión de Clavius de *Elementos*. Figuras tan significativas como Descartes, Laplace, Diderot o Voltaire estuvieron entre esos estudiantes.

Christopher Clavius

Baruch Spinoza: El modo geométrico



Baruch Spinoza

En los siglos XVII-XVIII diversos autores utilizaron *Elementos* como ejemplo de cómo debería estructurarse la razón. La obra de Euclides era vista como un modelo de certeza, claridad y transparencia. Hobbes, por ejemplo, juzgaba que si las leyes de las acciones humanas pudieran comprenderse con certeza geométrica, entonces se podrían eliminar la guerra, la ambición y la avaricia. En efecto, en estos siglos Euclides fue la referencia de certeza en occidente, siendo considerado el libro de *Elementos* una expresión de la relación más simple posible con la verdad. Un buen numero de autores escribieron obras de filosofía, física o teología al modo geométrico con la convicción de que así sus trabajos alcanzarían más claridad, certeza, brevedad, transparencia y persuasión.

Un gran exponente de estos pensadores que adoptaron el modo geométrico fue el filósofo Baruch Spinoza. Este autor, habiendo recibido, entre otras, las influencias de Descartes, Hobbes, la tradición judía, Maimóndes, Ben Gershon, las matemáticas, la geometría y Euclides, aplicó el referido modo geométrico a su *Ética.* ¿Qué tarea básica tenía la ética desde el punto de vista de Spinoza?

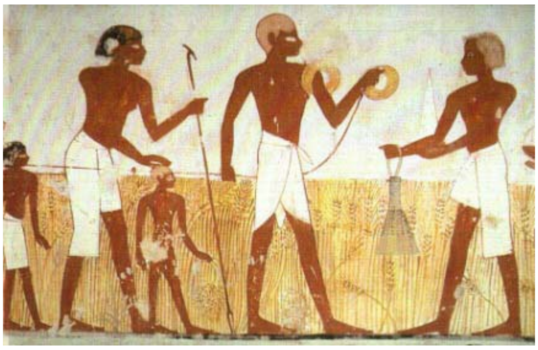
> […] limpiar la mente de ideas erróneas y sustituirlas por las correctas, contrarrestar y convertir a los charlatanes en razonadores.[48]

La obra filosófica *Ética* de Spinoza quiere desentrañar las consecuencias de la naturaleza de Dios en cada campo del pensamiento –la mente, la moral, las emociones, la política, la religión–. Escrita en estilo geométrico –207 proposiciones, cada una con una demostración–, es una obra original y sorprendente que a la pregunta esencial *¿Qué existe?*, responde: Dios. Todo lo que existe es una modificación o modo de Dios; los modos tienen atributos –v.g. los objetos físicos son un modo que tienen como atribuyo la extensión; las mentes son un modo que tienen como atribuyo el pensamiento–. El Dios de Spinoza no se vincula con el amor ni tiene el deseo de ser adorado, es un Dios impersonal. Spinoza afirma que en este mundo no existe el libre albedrío: no existe la

48 Wardhaugh, B., *Las infinitas vidas de Euclides*, Shackleton, 2020, p. 200.

libertad, por lo que no hay responsabilidad moral. Entonces, ¿dónde queda la ética si la libertad y la responsabilidad están descartadas? La ética de Spinoza se centra en el conocimiento verdadero, el cual funciona como una deducción geométrica. La virtud está en el conocimiento, pues es el único camino para sustituir las falsas creencias por las verdaderas. El hombre virtuoso llega a conocer la necesidad de todas las cosas, por lo que adopta una posición de resignación.

Peteconsis: Impuestos y abusos



Benjamin Wardhaugh ahora nos sitúa en el antiguo Egipto para explicarnos de qué manera en el siglo I a.C. los impuestos se determinaban a partir de los registros realizados por la agrimensura y cómo las mediciones que ésta realizaba, al no ser exactas, acababan perjudicando al agricultor, como fue en el caso de Peteconsis.

Ya en la Mesopotamia de las ciudades-Estado del cuarto milenio a.C.[49] existían técnicas escritas para contar (controlar) objetos y personas. El junco y la cuerda –elementos de medición utilizados por la agrimensura– ...

> […] se convirtieron en símbolos de una medición justa de la tierra, así como de la justicia en general […] Para los egipcios, al igual que para los babilonios, la correcta medida de la tierra era un símbolo de justicia.[50]

Bajo el dominio griego, las mediciones egipcias continuaron como base para aumentar (o bajar) los alquileres de tierras. La agrimensura no disponía de un método exacto y el arrendatario estaba obligado a pagar los impuestos de acuerdo con el valor más alto estimado. Pero este método tenía grandes ventajas: era rápido y sencillo y sus resultados eran razonablemente satisfactorios. Tales ventajas hicieron que el referido método se utilizara hasta el siglo XIX.

Wardhaugh apunta que han habido intentos de relacionar *Elementos* de Euclides con algunos problemas prácticos específicos, pero sobre esta cuestión, añade, no existe un consenso. Además:

> No hay nada en *Elementos* que se parezca a la división de un campo real o a la planificación de una ciudad […][51]

49 A finales de este cuarto milenio se consolidó en la parte septentrional de Mesopotamia la primera civilización histórica de esta región: la de los sumerios, pasándose a llamar Súmer el territorio que ocupaban. Esta civilización construyó la primera ciudad-Estado, llamada Uruk. Cada ciudad sumeria tenía su dios y se consideraba a la divinidad propietaria de todos los recursos económicos que estaban administrados por los sacerdotes. Así los sacerdotes acapararon el poder, pues los recursos estaban en sus manos en la medida en que las riquezas se acumulaban en los templos.

50 Wardhaugh, B., *Las infinitas vidas de Euclides*, Shackleton, 2020, pp. 216-217.

51 *Ibíd.*, p. 219.

Y es que, según el mismo Wardhaugh, hay indicios de que entre lo teórico y lo práctico hay en *Elementos* un abismo. Con todo, a pesar de esta profunda escisión, existen puntos en común, pues la geometría no es sino la *medición de la tierra* (significado en griego hasta época helenística) y el *geometrés* era el hombre con con la vara y la cuerda medía los campos. También se supone que Arquímides, desde su teoría, inventó máquinas. Sócrates, por su parte, afirmaba que la geometría era un paso previo a niveles superiores para ayudar a la mente a alcanzar la comprensión del Bien. Sea como fuere, aun con ciertos puntos en común:

> […] la relación entre las tradiciones práctica y teórica de la matemática ha sido compleja desde hace mucho tiempo, y a menudo se ha convertido en un enigma para todos aquellos implicados en una tradición o en otra.[52]

52 *Ibíd.*, p. 220.